



UNICEUB – CENTRO UNIVERSITÁRIO DE BRASÍLIA  
FAET - FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

## **SIMULAÇÃO DE CONTROLE DE SISTEMA DE LEVITAÇÃO MAGNÉTICA**

BRASÍLIA – DF

2004

UNICEUB – CENTRO UNIVERSITÁRIO DE BRASÍLIA  
FAET - FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

# **SIMULAÇÃO DE CONTROLE DE SISTEMA DE LEVITAÇÃO MAGNÉTICA**

por

SORAYA CHAIBUB ARAÚJO DE LEMOS  
9966460 – FAET – UNICEUB

Trabalho Final de Graduação

Prof. MC. Claudio Penedo de Albuquerque  
Orientador

Brasília/DF, junho de 2004.

## **Agradecimentos**

Agradeço a Deus, em primeiro lugar, por estar presente em todas as situações.

Aos meus queridos pais, Valério Adriano de Lemos e Kátia Chaibub Araújo de Lemos, por permitirem a realização deste sonho, estando presentes sempre nos momentos de alegria e de tristeza, me apoiando sempre com muito amor.

Ao querido Bruno de Melo Silva por me acompanhar e me apoiar em todos os momentos de minha vida acadêmica e pessoal durante estes cinco anos, me ajudando e me incentivando.

À minha querida irmã, Yasodhara Chaibub Araújo de Lemos, por estar sempre ao meu lado e por sua imensa paciência.

Aos colegas e professores que compartilharam estes cinco anos de estudos nos ensinando sempre, e em especial ao professor Claudio Penedo de Albuquerque que me ajudou e orientou na realização deste trabalho.

Aos meus queridos avós José da Silva Araújo, Margarida Chaibub Araújo e Vanda Maciel de Lemos e aos meus padrinhos José da Silva Araújo Filho e Débora Chaibub Araújo Cascão, pela grande torcida.

A todos os meus familiares e amigos que compartilharam comigo todos os momentos de alegrias e tristezas.

## **Resumo**

O presente estudo aborda o controle, simulado em computador, de um sistema de levitação magnética. O objetivo deste estudo foi o projeto de um compensador para o sistema magnético com a finalidade de estabilização do mesmo.

Este estudo descreve os procedimentos de análise e síntese de um compensador para um sistema de levitação magnética. Inicialmente foi feita uma análise em tempo contínuo do sistema para depois se passar para a análise em tempo discreto. Durante estas análises foram feitos estudos a respeito do modelo matemático do levitador magnético, do desempenho e da estabilidade do sistema de modo a garantir o funcionamento controlado do mesmo. Empregou-se a simulação em todos os instantes como forma de verificação da estabilidade do sistema.

O princípio da levitação magnética é utilizado com frequência em sistemas de suspensão magnética. A partir dos princípios deste estudo podem-se implementar sistemas robustos baseados no uso da energia magnética. O sistema proposto neste trabalho visa controlar a tensão de um eletroímã de modo a estabilizar o posicionamento de uma esfera submetida à força gravitacional e magnética. Para o sistema proposto neste estudo foram estudados: o modelo matemático do sistema, o sistema a malha aberta (tempo contínuo), o sistema a malha fechada (tempo contínuo) e o compensador adequado que levasse o sistema às condições de estabilidade e desempenho desejados, tanto em tempo contínuo como em tempo discreto.

**Palavras Chaves:** Simulação, Levitador Magnético, Estrutura de Compensação.

# Sumário

<b>Capítulo 1 - Introdução .....</b>	<b>7</b>
<b>Capítulo 2 – O Sistema Levitador Magnético .....</b>	<b>9</b>
2.1 - A Modelagem Matemática .....	10
2.2 – Subsistema Mecânico .....	11
2.3 – Subsistema Elétrico .....	12
2.4 – A Condição de Equilíbrio .....	13
2.5 – Descrição do Sistema em Variáveis de Estado .....	14
2.6 – Linearização do Modelo Matemático e Determinação das Matrizes de Estado .....	15
2.7 – Função de Transferência .....	21
2.8 – O Sensor de Posição .....	22
2.9 – O Sistema Realimentado .....	24
<b>Capítulo 3 – A Análise da Estabilidade e Desempenho do Sistema .....</b>	<b>26</b>
3.1 – A Compensação do Sistema .....	29
3.1.1 – Compensação por Avanço de Fase .....	29
3.1.2 – Compensação por Atraso de Fase .....	30
3.1.3 – Compensação por Atraso e Avanço de Fase .....	31
3.2 – Análise de Requisitos de Desempenho do Sistema .....	31
<b>Capítulo 4 – A Análise da Estrutura de Compensação em Tempo Discreto .....</b>	<b>35</b>
4.1 – Estabilidade de Sistemas Discretos .....	35
4.2 – Discretização da Estrutura de Compensação .....	36
4.3 – Relacionando a Função de Transferência e a Equação de Diferenças .....	38
<b>Capítulo 5 – Conclusão .....</b>	<b>40</b>
<b>6 – Referências Bibliográficas .....</b>	<b>42</b>
<b>7 – Anexos .....</b>	<b>43</b>

## Lista de Símbolos

$K$	Constante de força
$i$	Corrente elétrica
$x$	Posição vertical da esfera
$m$	Massa da esfera
$g$	Aceleração da gravidade
$R_L$	Resistência do eletroímã
$L$	Indutância do eletroímã
$V$	Tensão no eletroímã
$\xi$	Coefficiente de amortecimento
$\omega_n$	Frequência natural não-amortecida
$p$	Pólo

## Lista de Figuras

Figura 2.1 - Funcionamento do levitador magnético.....	9
Figura 2.2 - Diagrama de blocos do levitador magnético.....	10
Figura 2.3 - Diagrama de corpo livre da esfera. ....	11
Figura 2.4 - Circuito elétrico do eletroímã. ....	12
Figura 2.5 - Diagrama de blocos do sistema a malha aberta. ....	22
Figura 2.6 - Esquema do sensor de posição. ....	23
Figura 2.7 - Circuito elétrico do sensor de posição. ....	23
Figura 2.8 – Gráfico de saída do sensor pela posição da esfera. ....	24
Figura 2.9 - Diagrama de blocos do sistema a malha fechada. ....	25
 Figura 3.1 - Diagrama de Root Locus do sistema a malha fechada. ....	 26
Figura 3.2 - Diagrama de blocos do sistema com um ajuste de ganho K.....	27
Figura 3.3 - Resposta ao degrau do sistema a malha fechada não compensado.....	28
Figura 3.4 - Diagrama de blocos do sistema com a estrutura de compensação. ....	28
Figura 3.5 - Estrutura de avanço de fase. ....	29
Figura 3.6 - Estrutura de atraso de fase. ....	30
Figura 3.7 - Diagrama de Root Locus do sistema compensado. ....	32
Figura 3.8 – Diagrama de blocos do sistema compensado.....	33
Figura 3.9 - Resposta ao degrau do sistema compensado. ....	34
 Figura 4.1- (a) Região de mapeamento do plano s.....	 35
Figura 4.1- (b) Região de mapeamento no plano z.....	35
Figura 4.2 - Sinal em tempo contínuo e sinal em tempo discreto. ....	36
Figura 4.3 - Resposta ao degrau da estrutura de compensação em tempo discreto.....	37
Figura 4.4 – Diagrama de blocos da estrutura de compensação na forma direta II.....	39
Figura 4.5 – Diagrama de blocos do sistema de controle com um computador digital.....	39

## **Lista de Tabelas**

Tabela 2.1 - Variáveis de estado e de entrada. ....	14
Tabela 2.2 – Variáveis de estados, entradas e saídas em torno do ponto de equilíbrio.....	16
Tabela 2.3 - Parâmetros do modelo. ....	21



## Capítulo 1 - Introdução

Em relatos feitos por volta de 800 a.C. os gregos dissertavam a respeito das propriedades “maravilhosas” de um certo minério de ferro que depois foi chamado de magnetita por ser encontrado na Magnésia, região da Ásia Menor. As propriedades da magnetita de atrair e repelir minérios de ferro e de se orientar na Terra intrigaram cientistas e filósofos durante séculos. Porém, somente séculos depois foi publicado o primeiro livro sobre o assunto, em 1269 d.C. Apesar de ter uma história estendida por séculos, somente nos dois últimos o magnetismo se tornou parte de importantes estudos no campo da ciência e da tecnologia, o qual teve um papel fundamental no desenvolvimento da sociedade do século XIX.

Em 1820 Oersted e Ampère descobriram a geração de uma força magnética através de uma corrente elétrica, possibilitando a criação do motor elétrico. Na década de 1840 Faraday e Henry descobriram o fenômeno da indução eletromagnética que mais tarde seria base para a invenção do gerador elétrico. A partir daí houveram muitas outras descobertas e estudos em torno do magnetismo. Entretanto, o magnetismo experimentou grande avanço somente após a Segunda Guerra Mundial.

Os fenômenos do magnetismo passaram a integrar os livros especializados e os encontros e as conferências a partir da década de 1950, firmando um importante ramo da física e da ciência. A pesquisa do magnetismo ganhou então grande dimensão e representou um papel importante no desenvolvimento da tecnologia moderna. Os materiais magnéticos encontram, hoje, aplicações em um número elevado de produtos e processos industriais dos mais diversos setores que vão desde ímãs permanentes que são usados em fechaduras, motores elétricos, balanças eletrônicas e sensores de posição, até componentes sofisticados que são usados na indústria de computadores e de sistemas de comunicação.

Associado ao uso da engenharia de controle moderna, é possível construir sistemas baseados em forças magnéticas que possam movimentar os mais diversos mecanismos, podendo citar como exemplo o projeto do trem MAGLEV(desenvolvido no Japão), que se baseia no uso da levitação magnética para se movimentar, eliminando o atrito com os trilhos e permitindo uma viagem mais rápida e silenciosa. A engenharia, neste contexto, diz respeito ao conhecimento de materiais e forças da natureza associado ao controle destes para o benefício da humanidade. O uso de sistemas de controle permite que os sistemas da vida real sejam conhecidos e modelados de modo a controlar seu funcionamento. Um sistema de controle

então pode ser descrito como uma interconexão de componentes que formam uma configuração de modo a produzir uma resposta desejada desse sistema.

O uso da retroação nos sistemas de controle permitiu o desenvolvimento do chamado controle automático, onde o uso de um sinal de retroação no sistema associado a uma medida do sinal de saída permite manter uma relação preestabelecida entre a saída e a entrada do sistema para controlar o processo.

O mecanismo regulador de bóia aparece na Grécia no período entre 300 a 1 a.C. como uma das primeiras aplicações do controle com retroação. Em 1681 foi inventado o primeiro controlador de caldeiras a vapor por Dennis Papin (1647-1712). Porém, o primeiro controlador automático usado em processo industrial foi o regulador de esferas de James Watt, desenvolvido em 1769 para controlar a velocidade de máquinas à vapor.

Durante a segunda Guerra Mundial a teoria e a prática do controle automático receberam um grande incentivo uma vez que se tornou necessária a criação de pilotos automáticos para aviões, sistemas de posicionamento de canhões, sistemas de controle para radares e outros sistemas militares. Modelos matemáticos e analíticos aumentaram em número e utilidade, permitindo executar cálculos mais rápidos e precisos.

Durante a década de 1980 tornou-se rotina a utilização de computadores como parte de sistemas de controle, permitindo a otimização, a rapidez e a precisão cada vez maior dos cálculos matemáticos. Com a era espacial, novos estímulos foram dados à engenharia de controle, permitindo projetar sistemas muito mais complexos e precisos. Assim, é possível hoje se encontrar a aplicação dos sistemas de controle em todos os setores e em nossa vida cotidiana.

É baseado nos conceitos de magnetismo e de sistemas de controle que se propõe neste trabalho um estudo a respeito de sua associação, criando uma base para um sistema de controle utilizando a levitação magnética. Propõe-se inicialmente a análise de uma estrutura em tempo contínuo de modo a garantir o funcionamento do sistema em condições satisfatórias de desempenho e estabilidade. Posteriormente, propõe-se a análise em tempo discreto de modo a introduzir o conceito de controle com computadores.

Este trabalho está dividido em 5 capítulos. No capítulo 2 é feita a modelagem matemática do sistema. No capítulo 3 é realizada a análise da estabilidade e desempenho do sistema de modo a projetar uma estrutura de compensação para o sistema. No capítulo 4 faz-se a análise da estrutura de compensação em tempo discreto de modo a introduzir-se o conceito de controle realizado por computador. No capítulo 5 é feita a conclusão deste trabalho.

## Capítulo 2 – O Sistema Levitador Magnético

O fenômeno da levitação é baseado na suspensão de um corpo no ar sem nenhum apoio aparente, contrariando a ação da força gravitacional. Neste contexto, o uso do magnetismo visa criar uma força contrária à força gravitacional que permita estabilizar um corpo metálico suspenso no ar.

O fenômeno da levitação magnética é realizado tipicamente usando eletroímãs controlados. Além do suporte a cargas (levitação), a atuação magnética engloba inúmeras outras aplicações como, por exemplo, a aplicação de força com precisão e a movimentação de objetos a distâncias precisas sem contato entre as superfícies e sem essencialmente nenhuma fricção. Este tipo de atuação pode ser usado em outros ambientes (corrosivo, vácuo, ultralimpos, etc) onde, tradicionalmente, os atuadores mecânicos ou hidráulicos não podem atuar.

O funcionamento do sistema do levitador magnético é ilustrado na Figura 2.1. O Levitador Magnético baseia-se na levitação de uma esfera de metal através da força magnética exercida por um eletroímã sobre a mesma. Através do uso de um sensor o sistema tem a realimentação da posição da esfera de modo a gerar um sinal de erro que estabilize sua posição.

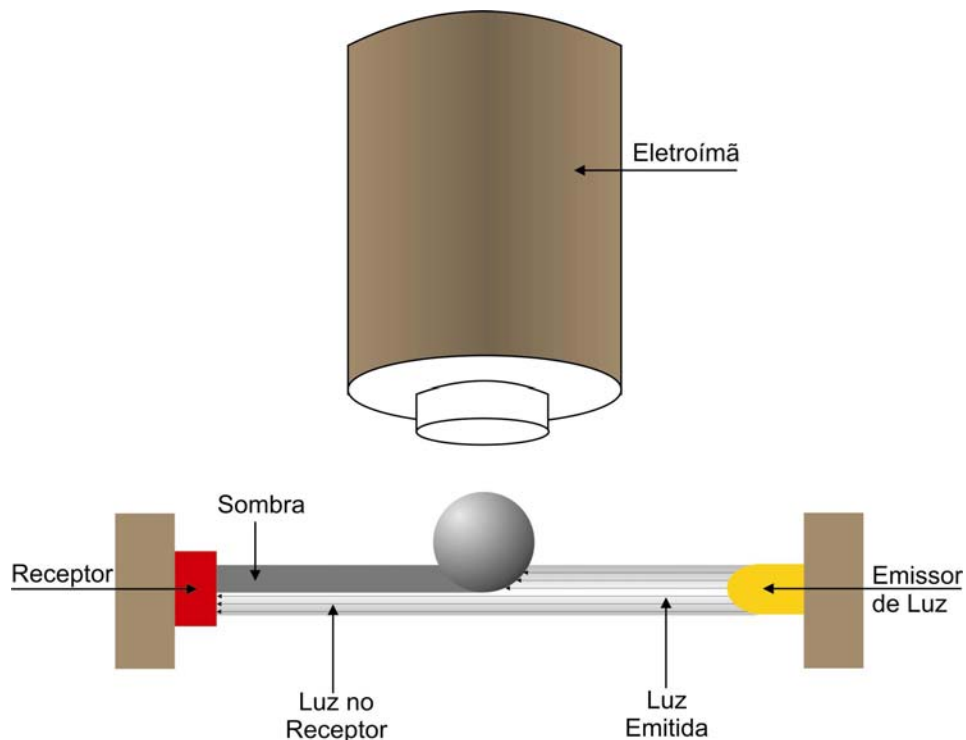


Figura 2.1 - Funcionamento do levitador magnético.

O sistema funciona a partir de uma tensão de referência  $R(s)$  que faz com que o eletroímã levite a esfera. Ao interromper o feixe de luz produzido pelo emissor do sensor, a esfera produz uma sombra no receptor. Esta sombra é função da posição da esfera. O sinal  $B(s)$  produzido pelo sensor é enviado em forma de tensão o qual é comparado com o sinal de entrada  $R(s)$ . O sinal de erro  $E(s)$  resultante desta comparação é enviado ao controlador que reajusta o sinal de tensão aplicado ao eletroímã de modo a posicionar a esfera na posição desejada. O diagrama de blocos equivalente do sistema levitador magnético é mostrado na Figura 2.2.

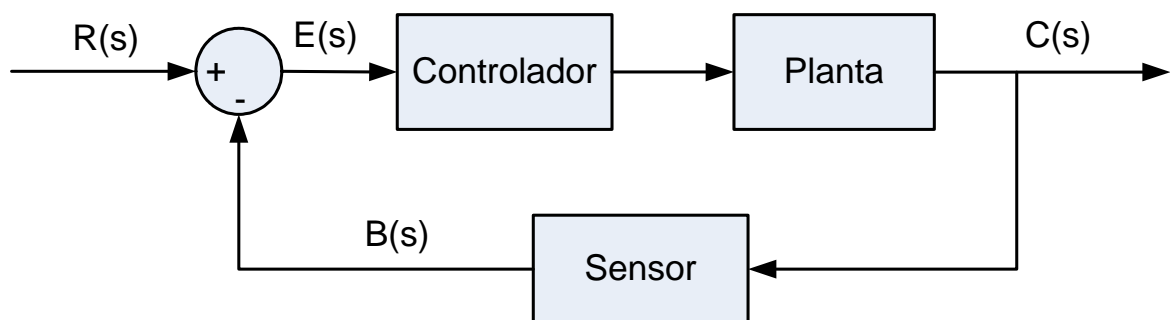


Figura 2.2 - Diagrama de blocos do levitador magnético.

onde  $R(s)$  = Sinal de Entrada de Referência  
 $C(s)$  = Sinal de Saída (posição da esfera)  
 $B(s)$  = Sinal de Saída do Sensor  
 $E(s)$  = Sinal de Erro Atuante

## 2.1 - A Modelagem Matemática

Para entender e controlar um sistema é necessária a obtenção de um modelo matemático quantitativo deste sistema que visa analisar e prever o comportamento dinâmico do mesmo. Para isso, é necessária uma análise da relação entre as variáveis que atuam no sistema de modo a se obter tal modelo matemático. Em sistemas dinâmicos, como é o caso deste estudo, as equações que descrevem seu comportamento são usualmente equações diferenciais.

Na análise do modelo que se segue serão empregadas algumas considerações ou aproximações sobre seu sistema físico e seu funcionamento. Usando leis físicas que descrevem o sistema, pode-se obter um conjunto de equações diferenciais não-lineares de

modo a, posteriormente e através de particularização, obter a equação diferencial linear que descreve a operação do sistema.

O modelo do levitador magnético será dividido em dois subsistemas, mecânico e elétrico, de modo a analisar o comportamento de cada um deles. Na modelagem dos subsistemas utiliza-se o diagrama de corpo livre da esfera que irá levitar – para o subsistema mecânico, e do circuito elétrico do eletroímã – para o subsistema elétrico.

A partir dos estudos dos dois subsistemas é possível determinar o modelo matemático da planta do levitador, que descreve a dinâmica do sistema proposto.

## 2.2 – Subsistema Mecânico

Para o subsistema mecânico será utilizado o diagrama de corpo livre da esfera de modo a analisar as forças que atuam na mesma de modo a mantê-la em equilíbrio.

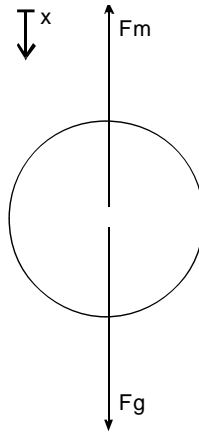


Figura 2.3 - Diagrama de corpo livre da esfera.

$F_m$  é a força magnética gerada pelo eletroímã e é dada por:

$$F_m = K \cdot \frac{i^2(t)}{x^2(t)} \quad (2.1)$$

onde,  $K$  é a constante de força,  $i$  é a corrente que passa pelo eletroímã no instante  $t$  e  $x$  é a distância da esfera ao eletroímã no instante  $t$ .

$F_g$  é a força gravitacional e é dada por:

$$F_g = m \cdot g \quad (2.2)$$

onde,  $m$  é a massa da esfera e  $g$  é a aceleração da gravidade.

Pela segunda lei de Newton tem-se que:

$$\sum_i F_i = m \cdot a \quad (2.3)$$

Do diagrama do corpo livre tem-se que a equação que descreve a dinâmica do subsistema mecânico:

$$F_g - F_m = m \cdot a \quad (2.4)$$

Substituindo as Equações 2.1 e 2.2 na equação 2.4 tem-se a equação do subsistema mecânico:

$$m \cdot g - K \cdot \frac{i^2(t)}{x^2(t)} = m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \quad (2.5)$$

## 2.3 – Subsistema Elétrico

Para o subsistema elétrico será utilizado o diagrama do circuito elétrico do eletroímã mostrado a seguir.

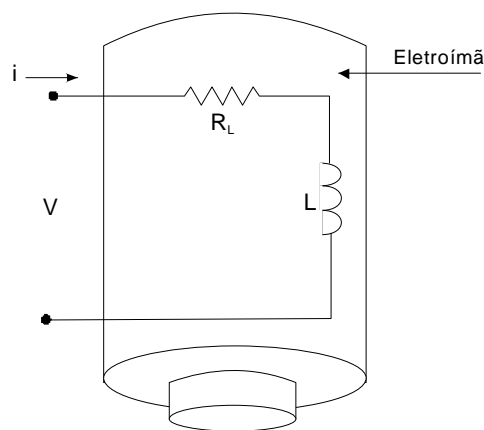


Figura 2.4 - Circuito elétrico do eletroímã.

Pela Lei de Kirchoff podemos representar o circuito como:

$$V(t) = R_L \cdot i(t) + \frac{di(t)}{dt} L \quad (2.6)$$

onde,  $R_L$  é a resistência do eletroímã,  $i$  é a corrente que passa pelo eletroímã no instante  $t$  e  $L$  é a indutância do eletroímã.

A equação 2.6 representa a equação do subsistema elétrico.

## 2.4 – A Condição de Equilíbrio

Tendo-se encontrado as equações dos subsistemas mecânico e elétrico pode-se partir para a análise do sistema no equilíbrio como um todo. Pode-se assumir que no equilíbrio as derivadas em relação ao tempo são iguais a zero. Aplicando essa condição à equação 2.6 tem-se:

$$V_{eq} = R_L \cdot i_{eq} \quad (2.7)$$

Onde  $V_{eq}$  é a tensão da bobina no equilíbrio e  $i_{eq}$  é a corrente que passa pela bobina do eletroímã no equilíbrio. Então tem-se que a corrente  $i_{eq}$  no equilíbrio é dada por:

$$i_{eq} = \frac{V_{eq}}{R_L} \quad (2.8)$$

Aplicando a condição de equilíbrio à equação 2.5 tem-se:

$$K \cdot \frac{i_{eq}^2}{x_{eq}^2} = m \cdot g \quad (2.9)$$

Rearranjando a equação 2.9 tem-se a posição da esfera no equilíbrio:

$$x_{eq} = i_{eq} \cdot \sqrt{\frac{K}{m \cdot g}} \quad (2.10)$$

Aplicando a equação 2.8 à equação 2.10 tem-se a posição da esfera no equilíbrio:

$$x_{eq} = \frac{V_{eq}}{R_L} \cdot \sqrt{\frac{K}{m \cdot g}} \quad (2.11)$$

## 2.5 – Descrição do Sistema em Variáveis de Estado

Quando um sistema possui muitas entradas e muitas saídas, sua análise se torna complexa. Muitas vezes é necessário reduzir a complexidade das expressões que descrevem o sistema, ou mesmo recorrer ao uso de computadores para efetuar os cálculos mais tediosos. Neste contexto, a teoria de controle moderno se baseia no uso de um sistema de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem que são agrupadas em uma equação diferencial vetor-matricial de primeira ordem, conhecida como modelo em variáveis de estado. Dessa forma é possível diminuir consideravelmente a representação matemática dos sistemas de equações diferenciais complexos. Assim, quando se aumenta o número das variáveis de estado, das variáveis de entrada e das variáveis de saída, não se aumenta a complexidade das equações [2].

As variáveis de estado podem ser definidas como sendo as variáveis que sofrem alterações ao longo do funcionamento do sistema. Dessa forma, deve-se escolher o número de variáveis de estado suficientes para descrever a dinâmica do sistema [1]. No sistema magnético descrito anteriormente as três grandezas empregadas como variáveis de estado foram a corrente  $i$  que circula pelo eletroímã ( $x_1 = i$ ), a posição vertical da esfera  $x$  ( $x_2 = x$ ) e a velocidade da esfera, que é dada pela derivada da posição vertical em relação ao tempo ( $x_3 = \frac{dx}{dt}$ ). As grandezas empregadas como variáveis de entrada foram a tensão elétrica no eletroímã ( $u_1 = V$ ) e a aceleração da gravidade ( $u_2 = g$ ). A Tabela 2.1 mostra as variáveis de estado e de entrada do sistema magnético:

Tabela 2.1 - Variáveis de estado e de entrada.

Variáveis de Estado	Variáveis de Entrada
$x_1 = i$	$u_1 = V$
$x_2 = x$	$u_2 = g$
$x_3 = \frac{dx}{dt}$	

Usando as variáveis de estado e de entrada pode-se representar o sistema em três equações diferenciais não-lineares que descrevem o comportamento do sistema, da seguinte forma:

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2) \quad , n = 1, 2, 3 \quad (2.12)$$



Reescrevendo a equação 2.6 do sistema elétrico tem-se:

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} \cdot (V - R_L \cdot i) \quad (2.13)$$

Substituindo as variáveis de estado e de entrada, pode-se representar a primeira equação diferencial não linear do sistema como:

$$\dot{x}_1 = \frac{u_1}{L} - \frac{R_L}{L} \cdot x_1 \quad (2.14)$$

Definindo-se a derivada da segunda variável de estado como sendo igual a terceira variável de estado, tem-se a segunda equação diferencial não linear do sistema:

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (2.15)$$

A terceira equação diferencial não linear é obtida a partir da equação 2.5 do sistema mecânico e representa as forças agindo na esfera:

$$\dot{x}_3 = u_2 - \frac{K}{m} \cdot \frac{x_1^2}{x_2^2} \quad (2.16)$$

Assim, têm-se as três equações de estados não-lineares:

$$\dot{x}_1 = \frac{u_1}{L} - \frac{R_L}{L} \cdot x_1 \quad (2.17)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (2.18)$$

$$\dot{x}_3 = u_2 - \frac{K}{m} \cdot \frac{x_1^2}{x_2^2} \quad (2.19)$$

## 2.6 – Linearização do Modelo Matemático e Determinação das Matrizes de Estado

A maioria dos sistemas físicos é linear apenas dentro de um intervalo de valores. Portanto, a maioria dos sistemas é na prática não-linear. Para que um sistema seja linear ele deve satisfazer a propriedade da superposição [1]. As equações obtidas do sistema magnético

são não-lineares, porém, elas podem ser consideradas lineares em torno de um ponto de operação, neste caso em torno do equilíbrio, para pequenas variações.

Na Tabela 2.2 reescrevem-se as variáveis de estado, as entradas e as saídas para valores em torno do ponto de equilíbrio:

Tabela 2.2 – Variáveis de estados, entradas e saídas em torno do ponto de equilíbrio.

Estados		Entradas		Saídas
$x_1 = x_{1eq} + \Delta x_1$	$x_{1eq} = i_{eq}$	$u_1 = u_{1eq} + \Delta u_1$	$u_{1eq} = V_{eq}$	$y_1 = x_1$
$x_2 = x_{2eq} + \Delta x_2$	$x_{2eq} = x_{eq}$	$u_2 = u_{2eq} + \Delta u_2$	$u_{2eq} = g_{eq}$	$y_2 = x_2$
$x_3 = x_{3eq} + \Delta x_3$	$x_{3eq} = \dot{x}_{eq}$			

Da tabela 2.2 pode-se definir o vetor de estados como:

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta i \\ \Delta x \\ \Delta \dot{x} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

e o vetor de entrada como:

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta g \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Conseqüentemente pode-se representar o sistema como um vetor-matriz linear em torno do ponto de equilíbrio:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (2.22)$$

Torna-se necessário definir, neste ponto, as matrizes A (matriz de estado) e B (matriz de entrada). O sistema do levitador magnético é não linear, uma vez que as equações que descrevem a dinâmica do sistema não satisfazem o princípio da superposição. Dessa forma, torna-se necessário linearizar o modelo matemático.

Pode-se linearizar o sistema definindo as variáveis de estado e de entrada em torno do ponto de equilíbrio:

$$1) \ x_{1eq} = \frac{u_{1eq}}{R_L} \quad (2.23)$$

$$2) \ x_{2eq} = x_{eq} = \sqrt{\frac{K}{m \cdot u_{2eq}}} \cdot \frac{u_{1eq}}{R_L} \quad (2.24)$$

$$3) \ x_{3eq} = \dot{x}_{eq} = 0 \quad (2.25)$$

$$4) \ u_{1eq} = V_{eq} \quad (2.26)$$

$$5) \ u_{2eq} = g_{eq} \quad (2.27)$$

Pode-se agora calcular os elementos da matriz A como:

$$A = [a_{ij}] = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \quad (2.28)$$

Da equação 2.17, a primeira equação diferencial do sistema, tem-se que:

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\frac{R_L}{L} \quad (2.29)$$

Ainda da equação 2.17 tem-se que:

$$a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0 \quad (2.30)$$

Novamente da equação 2.17 tem-se que:

$$a_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0 \quad (2.31)$$

Usando-se a equação 2.18 para calcular as derivadas em relação à segunda equação diferencial do sistema tem-se:

$$a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \quad (2.32)$$

$$a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \quad (2.33)$$

$$a_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 1 \quad (2.34)$$

Passando-se à terceira equação diferencial do sistema, a equação 2.19, tem-se:

$$a_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -2 \cdot \frac{K}{m} \cdot \frac{x_1}{x_2^2} \quad (2.35)$$

Aplicando as condições de equilíbrio tem-se:

$$a_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -2 \cdot \frac{K}{m} \cdot \frac{x_{1eq}}{x_{2eq}^2} \quad (2.36)$$

Substituindo as equações de estados e de entradas da Tabela 2.1 na equação 2.36 tem-se:

$$a_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -2 \cdot \frac{K}{m} \cdot \frac{\frac{u_{1eq}}{R_L}}{\left( \sqrt{\frac{K}{m \cdot u_{2eq}}} \cdot \frac{V_{eq}}{R_L} \right)^2} = -2 \cdot \frac{g_{eq} \cdot R_L}{V_{eq}} \quad (2.37)$$

Ainda da equação 2.19 tem-se:

$$a_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 2 \cdot \frac{K}{m} \cdot \frac{x_1^2}{x_2^3} \quad (2.38)$$

Aplicando as condições de equilíbrio tem-se:

$$a_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 2 \cdot \frac{K}{m} \cdot \frac{x_{1eq}^2}{x_{2eq}^3} \quad (2.39)$$

Substituindo as equações de entradas e de estados da Tabela 2.1 na equação 2.39 tem-se:

$$a_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 2 \cdot \frac{K}{m} \cdot \frac{\left( \frac{u_{1eq}}{R_L} \right)^2}{\left( \sqrt{\frac{K}{m \cdot u_{2eq}}} \cdot \frac{V_{eq}}{R_L} \right)^3} = 2 \cdot \frac{g_{eq} \cdot R_L}{V_{eq}} \cdot \sqrt{\frac{m \cdot g_{eq}}{K}} \quad (2.40)$$

E finalmente da equação 2.19 tem-se:

$$a_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0 \quad (2.41)$$

Pode-se passar agora ao cálculo da matriz B. Analogamente à matriz A, para criar os elementos da matriz B pode-se usar:

$$B = [b_{ij}] = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right] \quad (2.42)$$

Da equação 2.17 tem-se:

$$b_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} = \frac{1}{L} \quad (2.43)$$

Ainda da equação 2.17 tem-se:

$$b_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial u_2} = 0 \quad (2.44)$$

Da equação 2.18 tem-se:

$$b_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial u_1} = 0 \quad (2.45)$$

Ainda da equação 2.18 tem-se:

$$b_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial u_2} = 0 \quad (2.46)$$

Da equação 2.19 tem-se:

$$b_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial u_1} = 0 \quad (2.47)$$

Ainda da equação 2.19 tem-se:

$$b_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial u_2} = 1 \quad (2.48)$$

Agora pode-se montar as matrizes A e B com os elementos encontrados e depois montar o vetor-matriz linear em torno do ponto de equilíbrio.

Matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 \cdot \frac{g_{eq} \cdot R_L}{V_{eq}} & 2 \cdot \frac{g_{eq} \cdot R_L}{V_{eq}} \cdot \sqrt{\frac{m \cdot g_{eq}}{K}} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

A partir das matrizes A e B encontradas, a representação da entrada no espaço de estados dos desvios em torno do ponto de equilíbrio é dada pela equação 2.51.

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 \cdot \frac{g_{eq} \cdot R_L}{V_{eq}} & 2 \cdot \frac{g_{eq} \cdot R_L}{V_{eq}} \cdot \sqrt{\frac{m \cdot g_{eq}}{K}} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz A}} \cdot \Delta \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz B}} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (2.51)$$

A representação da saída no espaço de estados dos desvios em torno do ponto de equilíbrio é dada pela equação 2.52.

$$\Delta \mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz C}} \cdot \Delta \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz D}} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (2.52)$$

onde a matriz C é a matriz de saída do sistema e representa as saídas  $x_1$  e  $x_2$  e D é a matriz de transmissão direta e representa os estados  $u_1$  e  $u_2$ .

Para simplificar os elementos das matrizes A e B da equação de entrada e C e D da equação de saída deve-se considerar:

- 1) As equações 2.8 e 2.27.
- 2) A entrada  $u_2$  será tratada como uma constante, uma vez que será considerada a aceleração da gravidade terrestre. Dessa forma a matriz B perderá a segunda

coluna, justificada pela retirada do parâmetro  $u_2$  da matriz de entrada. Da mesma forma a matriz D perderá a segunda coluna de modo a manter a multiplicidade das matrizes.

- 3) Foram consideradas inicialmente duas saídas  $y_1 = x_1 = i$  e  $y = x_2 = x$ . Porém como a saída desejada do sistema é a posição da esfera, a saída  $y_1$  será desconsiderada. Dessa forma a matriz C perderá a primeira linha.

Reescrevendo as matrizes A, B, C e D de acordo com as condições acima tem-se:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 \cdot \frac{g}{i_{eq}} & 2 \cdot \frac{g}{x_{eq}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (2.53)$$

$$\Delta \mathbf{y} = [0 \quad 1 \quad 0] \cdot \Delta \mathbf{x} + [0] \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (2.54)$$

## 2.7 – Função de Transferência

Usando-se o software Matlab versão 6.0, pode-se calcular a função de transferência da planta do sistema a partir da representação no espaço de estados do mesmo vista anteriormente. Para o cálculo da função de transferência do sistema é necessário o conhecimento dos parâmetros e constantes que fazem parte do sistema magnético. Neste estudo serão utilizados valores que fizeram parte de experiências realizadas em laboratório [8].

Tabela 2.3 - Parâmetros do modelo.

Parâmetros	Símbolo	Valor/Unidades
Massa da esfera	m	0.068 Kg
Diâmetro da esfera	d	2.54 cm
Indutância da bobina	L	0.4125 H
Resistência da bobina	$R_L$	11 $\Omega$
Range de movimento	x	14 mm
Corrente no equilíbrio	$i_{eq}$	1 A
Posição da esfera no equilíbrio	$x_{eq}$	0.007 m
Aceleração da gravidade	g	9.81 m/s <sup>2</sup>
Constante de Força	K	3.2654 x 10 <sup>-5</sup>

Para o cálculo da função de transferência da planta do sistema levitador magnético foi utilizada a função *ss2tf.m* do software Matlab versão 6.0. A função *ss2tf.m* converte uma representação em espaço de estados para uma função de transferência conforme mostrado no Anexo A. Tal função emprega a seguinte formulação:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.55)$$

onde A é a matriz de estados, B é a matriz de entrada, C é a matriz de saída, D é a matriz de transmissão direta, I é a matriz identidade e s é uma variável complexa.

O diagrama de blocos do sistema a malha aberta é mostrado abaixo.



Figura 2.5 - Diagrama de blocos do sistema a malha aberta.

A função de transferência da planta encontrada foi:

$$G(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = \frac{-47,56}{s^3 + 26,67 \cdot s^2 - 2803 \cdot s - 74740} \quad (2.56)$$

## 2.8 – O Sensor de Posição

Uma vez determinada a função de transferência da planta, deve-se agora encontrar a função de transferência do sistema realimentado. Para tal faz-se uso de um sensor de posição para fazer a realimentação da posição da esfera. O sensor é um dispositivo óptico que mede a posição do objeto. O sensor é composto por um emissor de luz e por um receptor, conforme mostra a Figura 2.6:



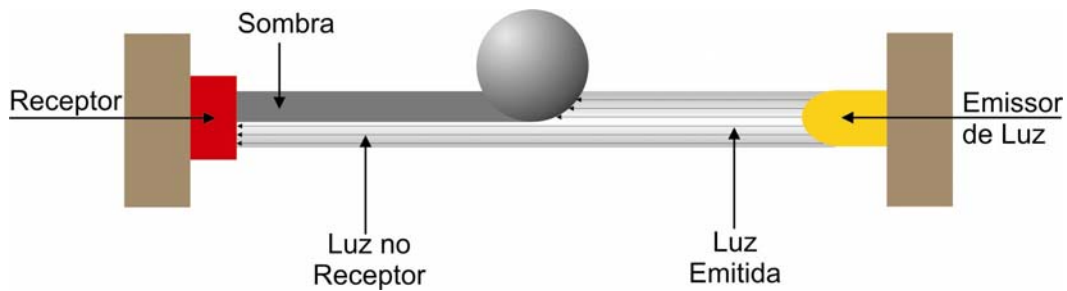


Figura 2.6 - Esquema do sensor de posição.

O emissor de luz emite uma faixa constante de luz que é percebida pelo receptor. A esfera produz uma sombra ao interromper a faixa de luz que chega ao receptor. Essa sombra faz com que chegue ao receptor uma menor quantidade de luz, alterando a resistência elétrica do sensor. A tensão de saída do circuito do sensor é função da quantidade de luz que chega ao receptor, o que implica que a tensão de saída do circuito também seja função de posição do objeto. O circuito do sensor é mostrado na Figura 2.7.

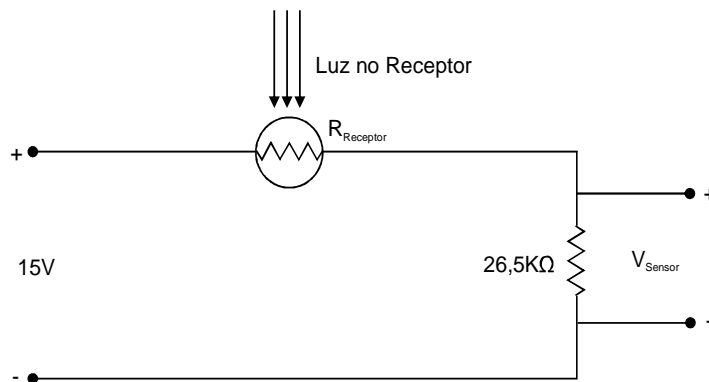


Figura 2.7 - Circuito elétrico do sensor de posição.

onde  $R_{\text{receptor}}$  é a resistência que varia de acordo com a intensidade de luz recebida e  $V_{\text{sensor}}$  é a tensão de saída do circuito elétrico do sensor. A resistência de  $26,5K\Omega$  é utilizada de modo a limitar a tensão de saída do sensor na faixa de 0 a 10V [7].

O sensor funciona com uma fonte de alimentação de 15 V. A tensão de saída do circuito do sensor varia de 0 a 10V e a resistência do receptor varia de  $16\text{ k}\Omega$  (sem sombra no receptor) a  $1\text{ M}\Omega$  (obscuridade no receptor) de acordo com a equação 2.57 [7].

$$V_{\text{sensor}} = \frac{397,5K\Omega}{R_{\text{Receptor}}K\Omega + 26,5K\Omega} \quad (2.57)$$

Quando a esfera não produz sombra no receptor, a resistência  $R_{\text{receptor}}$  é mínima (próxima a  $16k\Omega$ ) e a tensão de saída do sensor é máxima (próxima a 10V). Quando a esfera

interrompe totalmente a faixa de luz do emissor, a resistência  $R_{\text{receptor}}$  é máxima (próxima a  $1\text{M}\Omega$ ) e a tensão de saída do sensor é mínima (próxima a  $0\text{V}$ ).

A partir de testes realizados [7] pôde-se determinar a função de transferência do sensor. A figura 2.8 mostra dados colhidos enquanto a esfera se movimentava interrompendo o feixe de luz do emissor. A porção da esfera que interrompe o feixe de luz, medida em  $x$ , é gravada como uma tensão na saída do sensor. Nesta configuração, o sensor detecta a posição da esfera a partir borda inferior da mesma. A faixa de movimentação da esfera é de aproximadamente  $3\text{mm}$ .

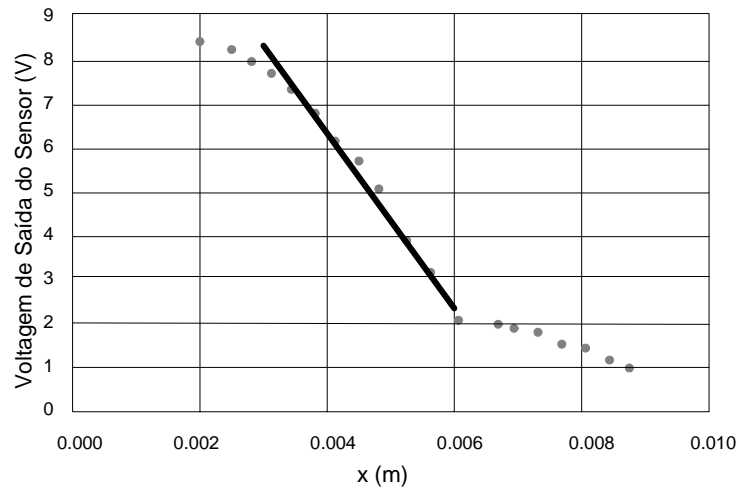


Figura 2.8 – Gráfico de saída do sensor pela posição da esfera.

A partir do gráfico da Figura 2.8, e para a faixa linear, pôde-se encontrar a função de transferência do sensor:

$$H(s) = -1934,5 \quad (2.58)$$

onde  $H(s)$  representa uma realimentação negativa.

## 2.9 – O Sistema Realimentado

A Figura 2.9 ilustra o diagrama de blocos do sistema a malha fechada empregando a realimentação do sensor.

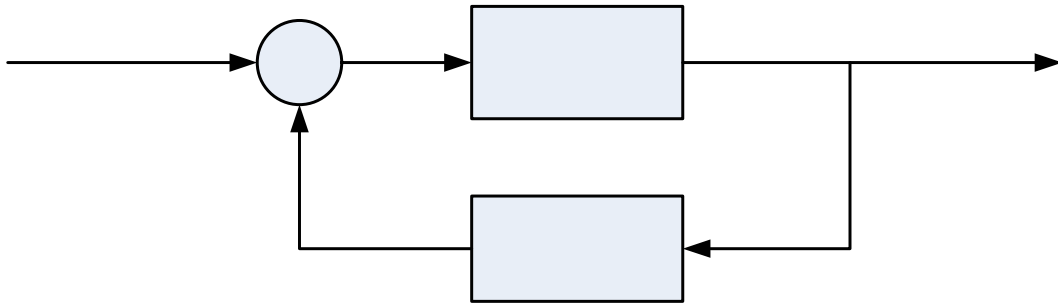


Figura 2.9 - Diagrama de blocos do sistema a malha fechada.

A função de transferência do sistema a malha fechada foi encontrada utilizando-se a função ***feedback.m*** do Matlab versão 6.0, conforme mostrado no Anexo A. Tal função executa o seguinte cálculo:

**R(s)**

$$G_o(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2.59)$$

onde G(s) é a função de transferência da planta e H(s) é a função de transferência do sensor.

A função de transferência encontrada é descrita abaixo.

$$G_o(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{-47,56}{s^3 + 26,67 \cdot s^2 - 2803 \cdot s - 166800} \quad (2.60)$$

## Capítulo 3 – A Análise da Estabilidade e Desempenho do Sistema

A estabilidade de um sistema linear a malha fechada é determinada pela localização dos pólos a malha fechada no plano  $s$ . Se qualquer um desses pólos se localizar no semiplano direito do plano  $s$ , então à medida que o tempo cresce, a resposta transitória aumenta monotonicamente ou oscila com amplitude crescente. Por outro lado, se os pólos a malha fechada se localizarem no semiplano esquerdo do plano  $s$ , a resposta transitória do sistema termina por alcançar um equilíbrio, representando um sistema estável [2].

A partir da função de transferência a malha fechada do sistema em estudo pôde-se verificar a instabilidade do mesmo devido aos dois coeficientes negativos do denominador, significando que há algum pólo no semiplano direito do plano  $s$ . Essa verificação foi feita pelo critério de estabilidade de Routh que estabelece que se qualquer um dos coeficientes da equação característica for zero ou negativo na presença de pelo menos um coeficiente positivo, então há uma ou mais raízes que são imaginárias ou que têm partes reais positivas [2], significando que o sistema não é estável.

A partir do software Matlab versão 6.0, conforme mostrado no Anexo A, foi possível localizar os pólos a malha fechada do sistema através da função *rlocus.m*. A localização dos pólos a malha fechada é mostrada na Figura 3.1.

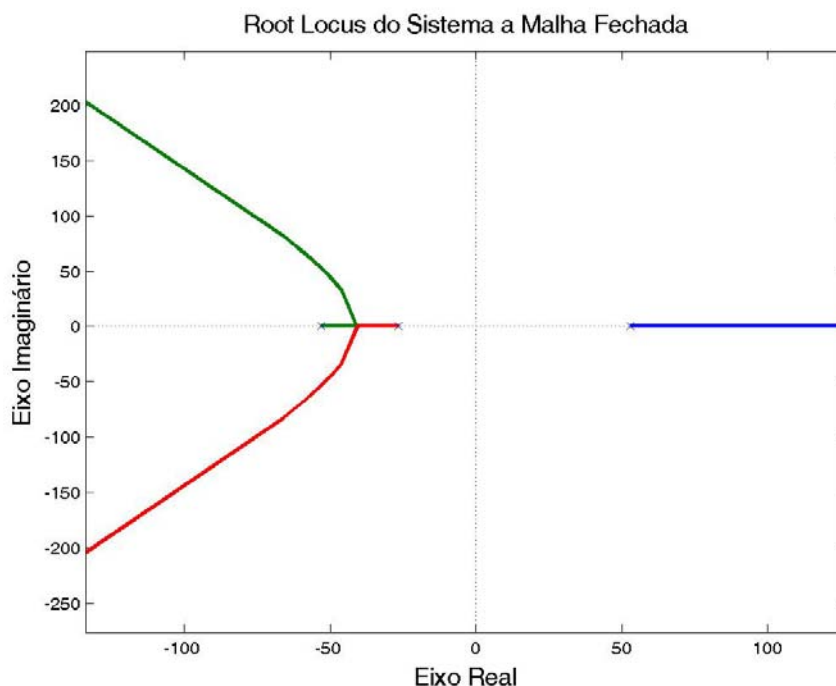


Figura 3.1 - Diagrama de Root Locus do sistema a malha fechada.

A partir do diagrama de Root Locus do sistema a malha fechada foi possível verificar mais uma vez a instabilidade do sistema. O sistema possui três pólos a malha fechada situados no eixo real. Através da função *pole.m* do Matlab versão 6.0 foi possível encontrar a localização dos pólos em -26.67, -52.9 e 52.9. O pólo localizado no semiplano direito do plano  $s$  (de valor 52.9) é chamado pólo instável.

Através do diagrama de Root Locus foi possível verificar também que o sistema não pode ser estabilizado simplesmente por um ajuste de ganho  $K$ , conforme mostrado na Figura 3.2. A Figura 3.2 ilustra o diagrama equivalente para o traçado do Root Locus do sistema realimentado. A partir deste diagrama de Root Locus obtido, conforme ilustrado na Figura 3.3, pode-se observar que o simples ajuste do ganho  $K$  não possibilita trazer o pólo instável (de valor 52.9) para o semiplano da esquerda do plano  $s$ , ou seja, tornar o sistema estável. Dessa forma, torna-se necessário a implementação de uma estrutura de compensação de modo a movimentar o lugar das raízes para o semiplano esquerdo do plano  $s$ .

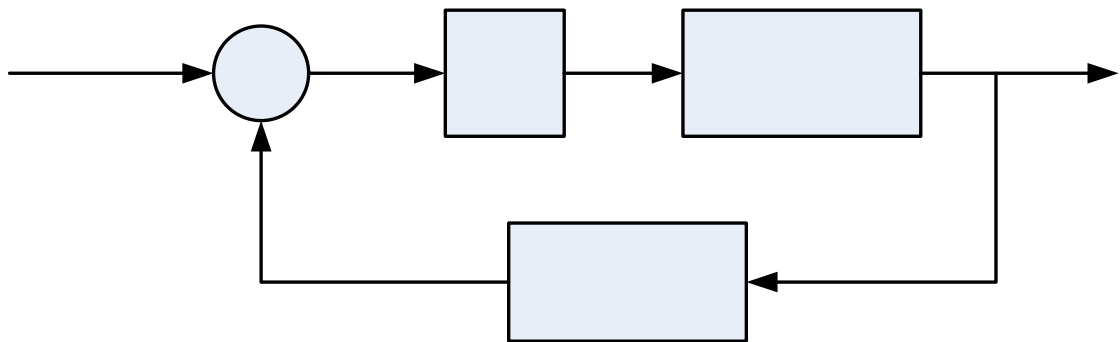


Figura 3.2 - Diagrama de blocos do sistema com um ajuste de ganho  $K$ .

Através da função *step.m* do Matlab versão 6.0 foi possível obter a resposta ao degrau do sistema a malha fechada. A Figura 3.3 mostra a resposta ao degrau do sistema, comprovando mais uma vez a instabilidade do mesmo. A resposta ao degrau mostra o deslocamento da esfera devido a uma súbita variação da entrada. De acordo com a resposta ao degrau, a esfera é colocada em uma posição inicial e é atraída pelo eletroímã até entrar em contato com o mesmo. Não há nenhum tipo de estabilização da esfera em uma posição de equilíbrio.

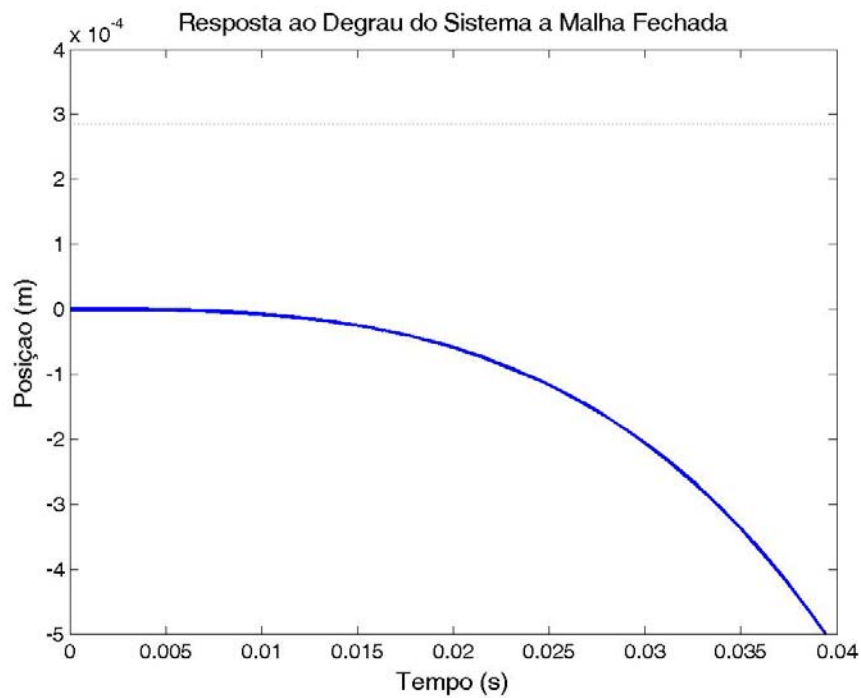


Figura 3.3 - Resposta ao degrau do sistema a malha fechada não compensado.

Para que o sistema seja adequadamente estabilizado é necessária a implementação de uma estrutura de compensação de modo a movimentar o lugar das raízes para o semiplano esquerdo do plano  $s$ . Como se deseja alterar a resposta transitória e a resposta estacionária do sistema, serão usados compensadores de avanço e atraso de fase para adequar o sistema às especificações de desempenho estabelecidas. A Figura 3.4 mostra o diagrama de blocos do sistema com o uso de uma estrutura de compensação adequada.

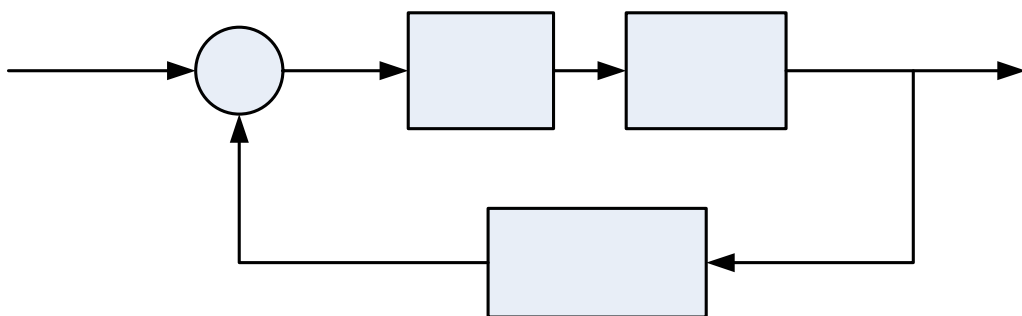


Figura 3.4 - Diagrama de blocos do sistema com a estrutura de compensação.

### 3.1 – A Compensação do Sistema

A partir do sistema a malha fechada, visto no Capítulo 2, pôde-se concluir que o sistema do levitador magnético é instável, não podendo ser estabilizado simplesmente por um ajuste de ganho  $K$ . Torna-se então necessária a adição de componentes no sistema de modo a estabilizar o mesmo. A adição de um dispositivo adequado, de modo que o sistema se comporte como desejado, chama-se compensação. Um dispositivo inserido no sistema com o propósito de satisfazer as especificações desejadas é chamado compensador. O compensador contrabalança deficiências de desempenho do sistema original [1].

As especificações de desempenho do sistema podem ser definidas em termos da localização desejada dos pólos e zeros da função de transferência a malha fechada. Pode-se assim especificar a localização dos pólos e zeros no plano  $s$  de modo a compensar as características indesejadas e inalteráveis do processo a controlar. No caso do levitador magnético, como a localização dos pólos não resulta em uma estrutura adequada (estável), deve-se adicionar uma estrutura de compensação de forma a alterar o lugar dos pólos. Pode-se assim, usar o método do lugar das raízes para especificar a função de transferência da estrutura de compensação de modo que, ao ser esta inserida ao sistema, seja alterado o lugar dos pólos originais, levando o sistema às especificações desejadas.

#### 3.1.1 – Compensação por Avanço de Fase

A compensação por avanço de fase é utilizada quando o sistema original (estável ou instável) possui características da resposta transitória indesejáveis. Os compensadores por avanço de fase são basicamente empregados para aumentar a velocidade de resposta e melhorar a estabilidade do sistema [1]. A estrutura de avanço de fase é mostrada na Figura 3.5. O compensador por avanço de fase adiciona um zero e um pólo ao sistema.

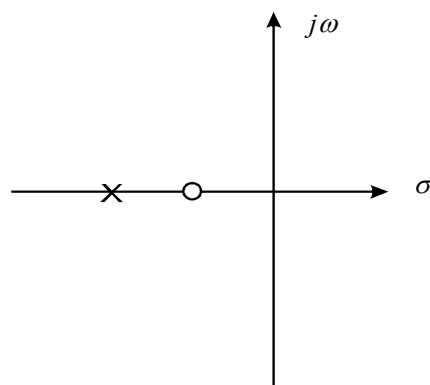


Figura 3.5 - Estrutura de avanço de fase.

A equação 3.1 mostra a função de transferência do compensador por avanço de fase.

$$G_c(s) = k_c \frac{s - a}{s - b} \quad (3.1)$$

A estrutura de compensação por avanço de fase apresenta um pólo em  $s = b$  e um zero em  $s = a$ , de forma a se ter o módulo de  $b$  maior que o módulo de  $a$  [2].

### 3.1.2 – Compensação por Atraso de Fase

A compensação por atraso de fase é utilizada quando o sistema apresenta resposta transitória com características satisfatórias, mas cujo comportamento do sistema em regime estacionário é insatisfatório. Basicamente, os compensadores de atraso de fase são empregados para se melhorar a exatidão da resposta estacionária, ou seja, diminuir o erro estacionário, sem alterar apreciavelmente as características da resposta transitória. A estrutura de atraso de fase é mostrada na Figura 3.6. Assim como o compensador em avanço de fase, o compensador por atraso de fase também adiciona um zero e um pólo ao sistema.

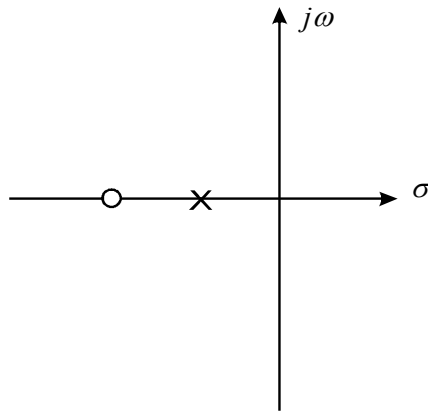


Figura 3.6 - Estrutura de atraso de fase.

A equação 3.2 mostra a função de transferência do compensador por atraso de fase.

$$G_c(s) = k_c \frac{s - a}{s - b} \quad (3.2)$$

A estrutura de compensação por avanço de fase apresenta um pólo em  $s = b$  e um zero em  $s = a$ , de forma a se ter o módulo de  $a$  maior que o módulo de  $b$  [2].



### 3.1.3 – Compensação por Atraso e Avanço de Fase

Quando se deseja melhorar ao mesmo tempo a resposta transitória e a resposta em regime estacionário do sistema, os compensadores em avanço e atraso de fase devem ser usados simultaneamente. Porém, ao invés de se usar as estruturas de avanço e atraso de fase separadamente, usa-se um único compensador com as características de avanço e atraso de fase. O compensador por avanço e atraso de fase possui dois pólos e dois zeros.

Como visto anteriormente, deseja-se melhorar ao mesmo tempo a resposta transitória e a resposta em regime estacionário do sistema levitador magnético uma vez que o mesmo não apresenta nenhuma estabilidade. Para se melhorar a resposta transitória e a resposta em regime estacionário, torna-se necessária, primeiramente, a análise dos requisitos de desempenho do sistema.

## 3.2 – Análise de Requisitos de Desempenho do Sistema

A partir da análise de requisitos de desempenho do sistema é possível determinar a função de transferência do sistema desejado. Primeiramente é necessário analisar a resposta que se tem do sistema e a resposta que se deseja ter do sistema. A partir da resposta do sistema desejado é definida a estrutura de compensação de modo que o sistema final seja estabilizado conforme desejado.

Primeiramente analisa-se o desempenho do sistema original do levitador magnético. Como visto anteriormente, o sistema é instável por possuir um pólo no semiplano direito do plano  $s$ . Os pólos do sistema original são: -26,67, -52,9 e 52,9. O pólo 52,9 é o pólo que torna o sistema instável. Como o sistema não pode ser estabilizado simplesmente por um ajuste de ganho  $K$ , há a necessidade de modificar o lugar das raízes do sistema de modo a estabilizar o mesmo e a obter o desempenho desejado.

Pode-se estabelecer o desempenho desejado para o sistema final a partir da análise do lugar das raízes. A partir de simulações feitas com o software Matlab versão 6.0, constantes no Anexo A, verificou-se que o sistema respondeu satisfatoriamente empregando-se o coeficiente de amortecimento de 0,7 e tempo de acomodação do sistema  $t_s$  de 0,25 segundos (critério de 5%, onde  $t_s = \frac{3}{\zeta \cdot \omega_n}$ ). A partir destes dois parâmetros de desempenho do sistema,

pôde-se encontrar a função de transferência do sistema desejado.

Deseja-se, a partir dos requisitos de desempenho acima descritos, inserir os pólos dominantes de forma a se ter o desempenho desejado. Sabe-se que os pólos dominantes de sistema podem ser calculados a partir de:

$$p = \zeta \cdot \omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.3)$$

onde  $\zeta$  é o coeficiente de amortecimento do sistema e  $\omega_n$  é a frequência natural não-amortecida do sistema.

A partir da equação 3.3 pode-se encontrar os pólos necessários para que o sistema final tenha o desempenho especificado, conforme o código do Anexo A. Os pólos encontrados foram:  $p_1 = -12 + 12.24i$  e  $p_2 = -12 - 12.24i$ . Estes pólos irão substituir o pólo instável e o sistema final terá como função de transferência (conforme código no Anexo A):

$$G_o(s) = \frac{-47,56}{s^4 + 103.6s^3 + 3614s^2 + 57240s + 414600} \quad (3.4)$$

Analisando-se os coeficientes do denominador da equação 3.4 (critério de estabilidade de Routh), não se pode afirmar a instabilidade do sistema. É necessário analisar-se a localização dos pólos da função de transferência. A partir do diagrama de Root Locus pode-se confirmar a estabilidade do sistema global. O diagrama de Root Locus do sistema compensado é mostrado na Figura 3.7.

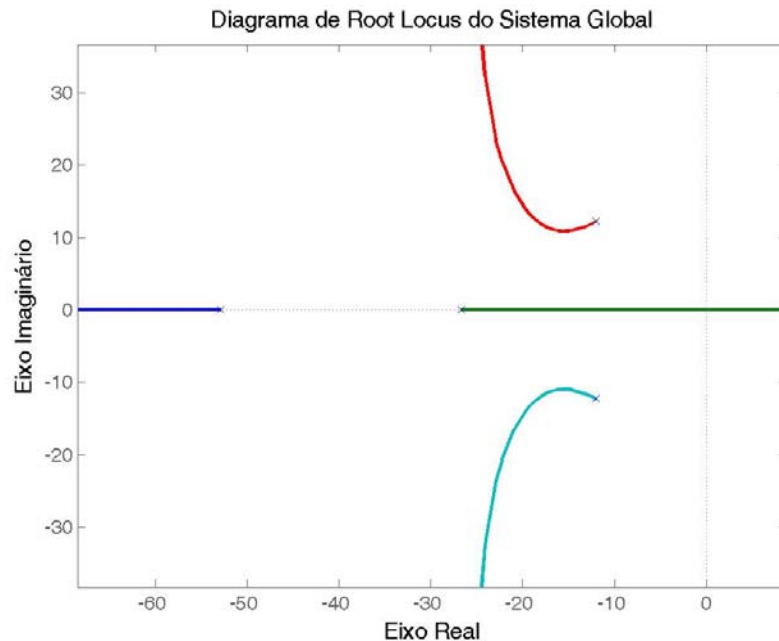


Figura 3.7 - Diagrama de Root Locus do sistema compensado.

Os pólos do sistema global são -52.9, -26.67, -12+12.2424i e -12-12.2424i.

Conforme visto na Figura 3.4, o sistema necessitaria de uma estrutura de compensação adequada de modo a estabilizar o sistema. A partir do sistema global desejado pode-se encontrar tal estrutura que adeque o sistema inicial às condições do sistema desejado. A partir da Figura 3.4 tem-se que a função de transferência global do sistema compensado é:

$$G_o(s) = \frac{G_c(s) \cdot G(s)}{1 + G_c(s) \cdot G(s) \cdot H(s)} \quad (3.5)$$

onde  $G_c(s)$  é a função de transferência da estrutura de compensação,  $G(s)$  é a função de transferência da planta,  $H(s)$  é a função de transferência do sensor e  $G_o(s)$  é a função de transferência global do sistema definido na equação 3.5.

Como se conhece as equações de  $G(s)$  da planta,  $G_o(s)$  do sistema global e  $H(s)$  do sensor, pode-se encontrar a função de transferência de  $G_c(s)$  da estrutura de compensação.

$$G_c(s) = \frac{s^3 + 26,67 \cdot s^2 - 2803 \cdot s - 74740}{s^4 + 103,6 \cdot s^3 + 3614 \cdot s^2 + 57240 \cdot s + 506600} \quad (3.4)$$

A estrutura de compensação que estabiliza o sistema é composta de um compensador em atraso de fase, um compensador em avanço de fase e uma estrutura de segunda ordem. Na Figura 3.8 é mostrado o diagrama de blocos do sistema com o uso da estrutura de compensação.

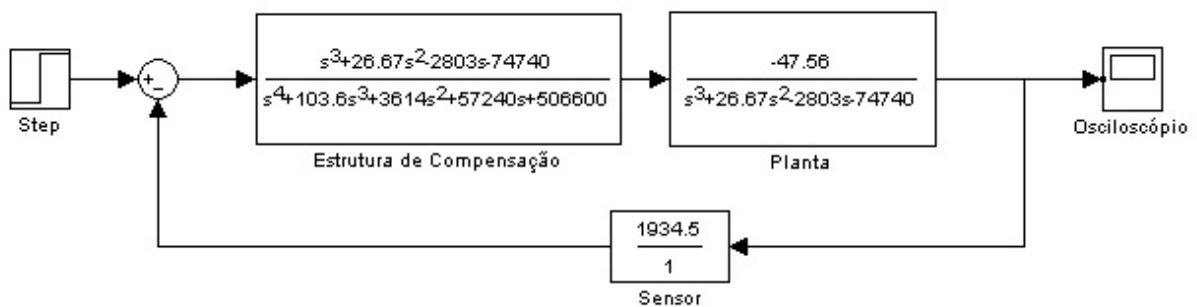


Figura 3.8 – Diagrama de blocos do sistema compensado.

Pode-se agora verificar a resposta ao degrau do sistema com a aplicação da estrutura de compensação, conforme mostrado na Figura 3.9.

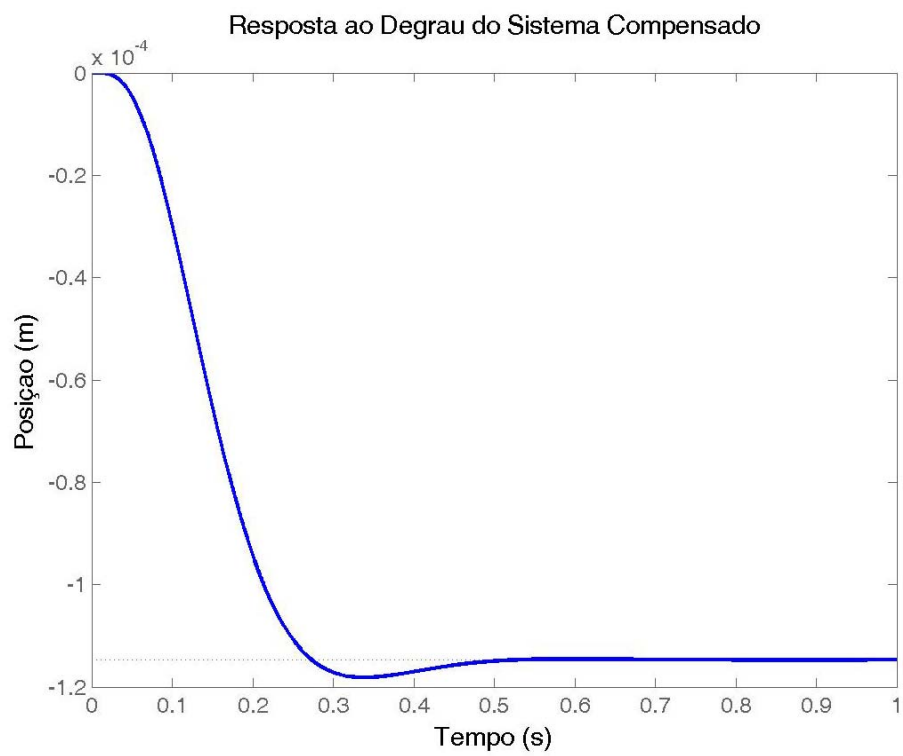


Figura 3.9 - Resposta ao degrau do sistema compensado.

## Capítulo 4 – A Análise da Estrutura de Compensação em Tempo Discreto

### 4.1 – Estabilidade de Sistemas Discretos

Tendo sido estabilizado o sistema em tempo contínuo e adequado o mesmo aos requisitos de desempenho, pode-se passar para a análise em tempo discreto. Após ter-se encontrado a função de transferência do sistema discreto pode-se analisar sua estabilidade. No plano  $s$  a estabilidade está condicionada à localização dos pólos no semiplano esquerdo do plano  $s$  (região A), conforme mostra a Figura 4.1a. Se todos os pólos estão localizados no semiplano esquerdo do plano  $s$  (região A), o sistema é dito estável. Se há pelo menos um pólo no semiplano direito do plano  $s$  (região C), o sistema é dito instável. Se há pelo menos um pólo localizado no eixo imaginário do plano  $s$  (região B), o sistema é dito criticamente estável.

Analogamente à estabilidade do plano  $s$ , a estabilidade no plano  $z$  também depende da localização dos pólos. Porém, no plano  $z$  a estabilidade do sistema está condicionada à localização dos pólos dentro do círculo unitário (região A), conforme mostra a Figura 4.1b. Se todos os pólos estão localizados dentro do círculo unitário (região A), então o sistema é dito estável. Se pelo menos um dos pólos estiver localizado fora do círculo unitário (região C), o sistema é dito instável. Se pelo menos um dos pólos estiver localizado sobre o círculo unitário (região B), o sistema é dito criticamente estável.

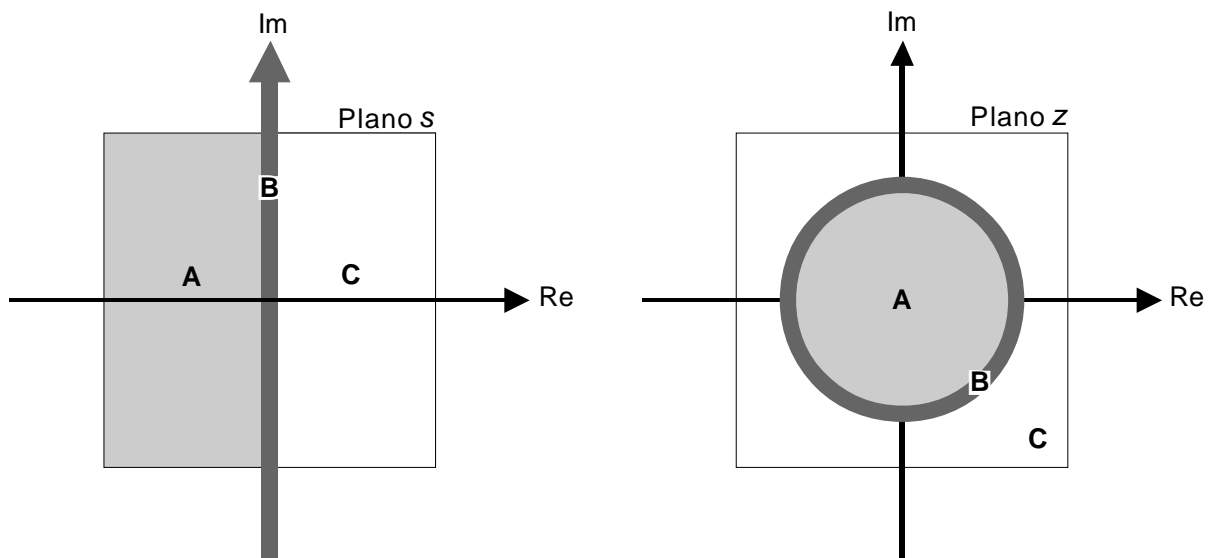


Figura 4.1- (a) Região de mapeamento do plano  $s$ ; (b) região de mapeamento no plano  $z$ .

## 4.2 – Discretização da Estrutura de Compensação

Uma das maneiras de classificar um sinal baseia-se em sua definição em função do tempo. Assim, pode-se definir um sinal  $x(t)$  de tempo contínuo, como um sinal definido para todo o tempo  $t$ . Analogamente, pode-se definir um sinal  $x[n]$  de tempo discreto como um sinal que é definido somente em instantes de tempo  $n \cdot T_s$ , onde  $T_s$  é o intervalo de amostragem.

Quando se transforma um sinal contínuo em um sinal discreto é necessária a definição de um período de amostragem, ou seja, é necessário definir a frequência com que o sinal em tempo contínuo será amostrado. A Figura 4.2 mostra um exemplo de um sinal em tempo contínuo e a respectiva amostragem do mesmo.

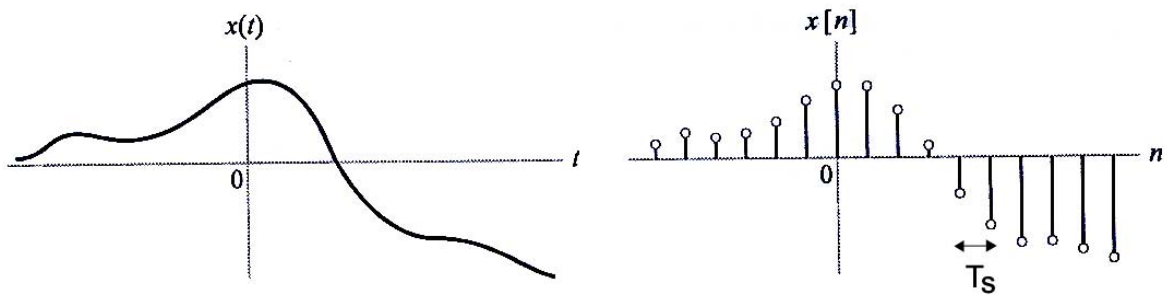


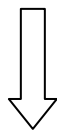
Figura 4.2 - Sinal em tempo contínuo e sinal em tempo discreto.

No presente estudo realizou-se a discretização da estrutura de compensação do sistema em tempo contínuo de forma que a mesma fosse implementada por computador e desta forma trabalhasse com sinais discretos. Através do programa *sistema\_mag.m* descrito no Anexo A, fez-se uma verificação de um intervalo de amostragem, de modo a se investigar a existência de pólos instáveis no sistema discretizado. No intervalo escolhido não se verificou a existência de pólos instáveis. Desse modo a estrutura de compensação poderia ser discretizada com qualquer período de amostragem dentro deste intervalo sem perder sua estabilidade. O período de amostragem do sinal escolhido foi de 0,01 s. O período de 0.01 s foi escolhido de forma a manter-se a integridade do sinal da estrutura de compensação em tempo discreto.

Através da transformada Z pôde-se encontrar a contraparte da transformada de Laplace para o tempo discreto da estrutura de compensação. Utilizando-se a função *c2d.m* do Matlab

versão 6.0 pode-se encontrar a função de transferência da estrutura de compensação em tempo discreto, conforme mostra a equação 4.1.

$$G_c(s) = \frac{s^3 + 26,67 \cdot s^2 - 2803 \cdot s - 74740}{s^4 + 103,6 \cdot s^3 + 3614 \cdot s^2 + 57240 \cdot s + 506600}$$


 $T_s = 0,01$

$$G_c(z) = \frac{0.006407z^3 - 0.01978z^2 + 0.01793z - 0.005008}{z^4 - 3.116z^3 + 3.624z^2 - 1.86z + 0.355} \quad (4.1)$$

Pode-se agora verificar a resposta ao degrau da estrutura de compensação discretizada, conforme mostra a Figura 4.3.

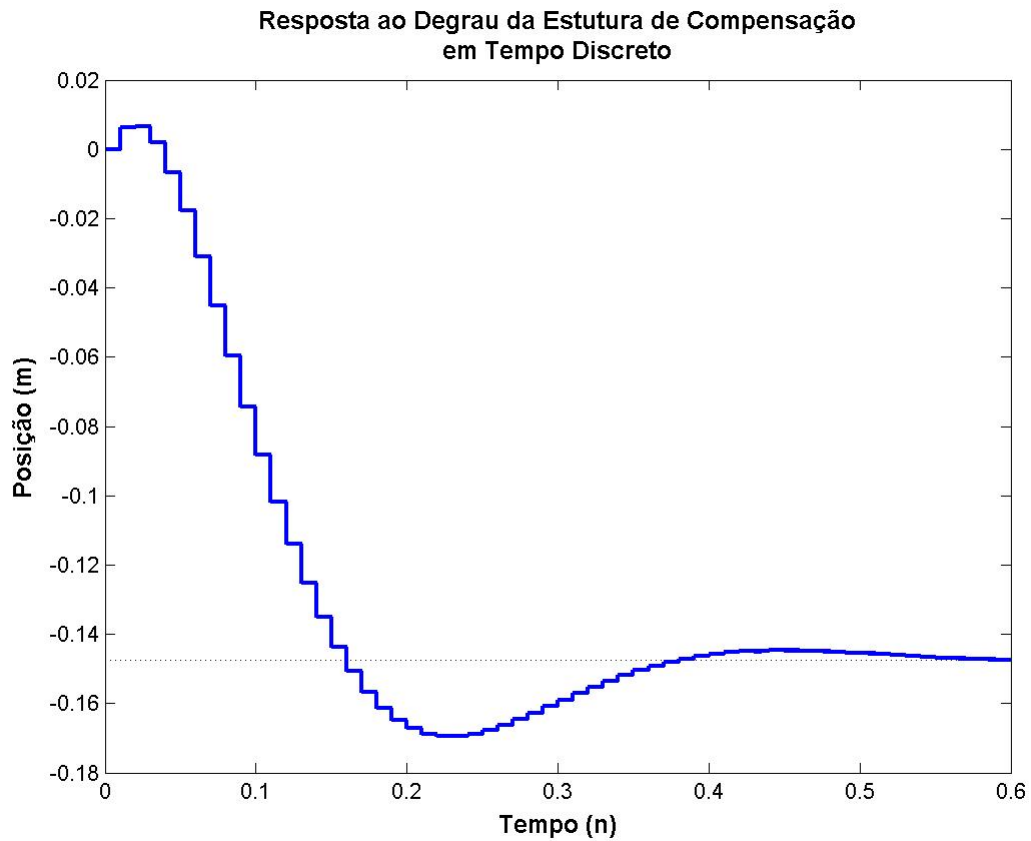


Figura 4.3 - Resposta ao degrau da estrutura de compensação em tempo discreto.

### 4.3 – Relacionando a Função de Transferência e a Equação de Diferenças

A partir da função de transferência de um sistema em tempo discreto pode-se obter a equação de diferenças representativa de tal sistema. A equação de diferenças de ordem  $n$  relaciona a entrada  $x[n]$  e a saída  $y[n]$  como[4]:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (4.2)$$

onde  $H(z)$  é uma função de transferência,  $M$  é a ordem do polinômio do numerador e  $N$  é ordem do polinômio do denominador e os polinômios do numerador e do denominador são funções da entrada e da saída do sistema, respectivamente.

O coeficiente de  $z^{-k}$  no polinômio do numerador é o coeficiente associado a  $x[n-k]$  na equação de diferenças. O coeficiente de  $z^{-k}$  no polinômio do denominador é o coeficiente associado a  $y[n-k]$  na equação de diferenças. Essa correspondência permite encontrar tanto a função de transferência a partir da equação de diferenças como a equação de diferenças a partir da função de transferência [4].

Reescrevendo-se a equação 4.1 como uma razão de polinômios em  $z^{-1}$  (dividindo-se tanto o numerador como o denominador por  $z^4$ ) tem-se:

$$G_c(z) = \frac{0.006407z^{-1} - 0.01978z^{-2} + 0.01793z^{-3} - 0.005008z^{-4}}{1 - 3.116z^{-1} + 3.624z^{-2} - 1.86z^{-3} + 0.355z^{-4}} \quad (4.3)$$

Comparando-se as Equações 4.2 e 4.3, tem-se a equação de diferenças da estrutura do controlador:

$$y[n] - 3.116y[n-1] + 3.624y[n-2] - 1.86y[n-3] + 0.355y[n-4] = 0.06407x[n-1] - 0.01978x[n-2] + 0.01793x[n-3] - 0.005008x[n-4] \quad (4.4)$$

A partir da equação de diferenças descrita na equação 4.4 pode-se representar o sistema através do diagrama de blocos na forma direta II, conforme mostra a figura 4.5.



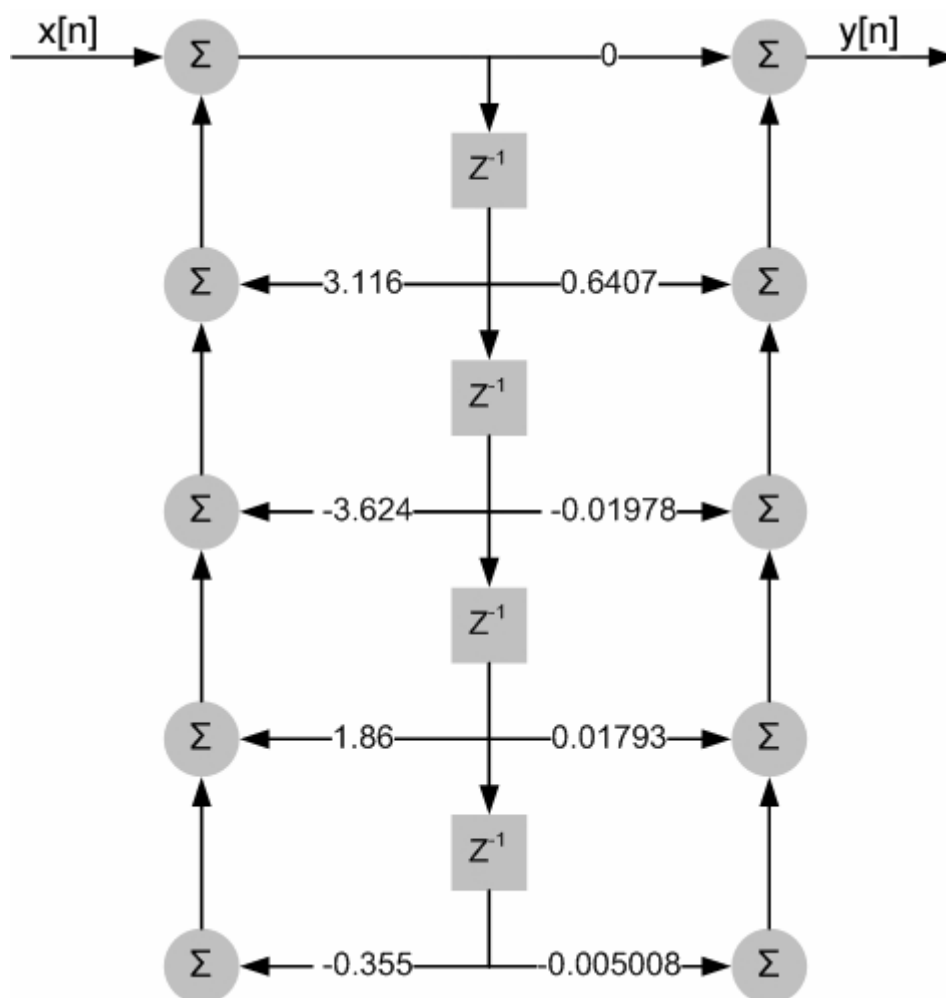


Figura 4.4 – Diagrama de blocos da estrutura de compensação na forma direta II.

Um computador, ou mesmo um processador digital de sinais, pode implementar de forma discreta uma estrutura de compensação em um sistema de controle com retroação[1].

A Figura 4.5 mostra o diagrama de blocos do sistema de controle com um computador e os conversores de sinais necessários para a interligação dos sistemas analógico e digital.

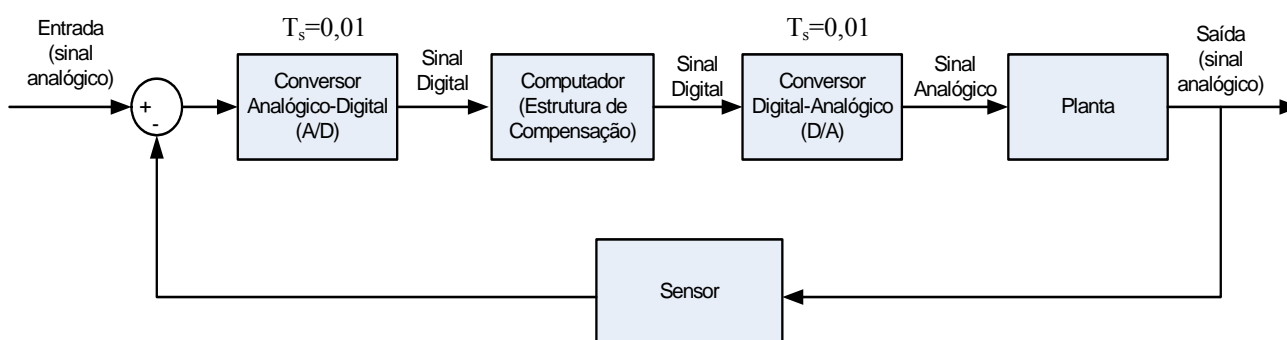


Figura 4.5 – Diagrama de blocos do sistema de controle com um computador digital.

## Capítulo 5 – Conclusão

A partir das leis físicas envolvidas no sistema levitador magnético foi possível realizar a modelagem matemática da dinâmica deste sistema através de equações diferenciais.

Com o emprego das equações pôde-se linearizar o sistema em torno do ponto de equilíbrio e descrever o sistema na forma de variáveis de estado.

A partir da equação em variáveis de estado pôde-se encontrar a função de transferência que descrevesse a dinâmica do sistema.

Baseado na função de transferência do sistema foi possível analisar a estabilidade e o desempenho do mesmo.

Através de simulações realizadas pôde-se verificar e confirmar a instabilidade do sistema e a necessidade de se implementar uma estrutura de compensação de modo a estabilizar o mesmo.

Foi projetada uma estrutura de compensação baseada nas condições de estabilidade e desempenho desejadas.

Pretendeu-se neste trabalho introduzir um estudo a respeito do controle feito por computador. Para isso foi necessária a discretização da estrutura de compensação do sistema de modo a possibilitar sua implementação via computador.

Verificou-se a faixa de valores possíveis de período de amostragem de forma a se ter uma estrutura de compensação discreta estável.

Com a estrutura de compensação discretizada pôde-se escrevê-la na forma de equação de diferenças e na forma direta II.

Neste trabalho introduziram-se conceitos e análises de modo a implementar a estrutura de compensação através do uso de um computador. Essa implementação através do uso de um computador pode ser amplamente estudada de modo a se poder, futuramente, implementá-la.

Durante a realização deste trabalho pôde-se familiarizar com conceitos importantes de magnetismo, modelagem matemática, modelagem no espaço de estados, análise de requisitos de desempenho e estabilidade de sistemas, análise de estruturas de compensação, análise de estabilidade em tempo discreto e uma introdução à implementação de estruturas de compensação através do uso de computadores.

A partir da introdução ao controle do sistema feito por computador pôde-se ampliar as possibilidades de implementação do projeto de modo a se deixar margem a estudos futuros.

O estudo proposto neste trabalho visou analisar uma parte importante nos projetos de sistemas de controle: a fase de análise e simulação dos modelos de sistemas. Através da análise e simulação de modelos de sistemas é possível se prever e corrigir possíveis erros de controle e funcionamento, especificar fatores como desempenho e estabilidade do sistema bem como se verificar as possíveis causas de interferências e erros do sistema.

Para o futuro deste projeto pode-se implementar a estrutura de compensação através do uso de um computador, analisar e modelar o sistema de modo que a esfera se movimente em outras dimensões, melhorar o sensoriamento do sistema e implementar sistemas de controle mais complexos.

## 6 – Referências Bibliográficas

- [1] - Dorf, C.Richard, Bishop, Robert H. Sistemas de Controle Modernos. 8ª Edição. Editora LTC, 2001.
- [2] - Ogata, Katsuhiko. Engenharia de Controle Moderno. 2ª Edição. Editora LTC, 1998.
- [3] - Norman S. Nise. Engenharia de Sistemas de Controle. 3ª Edição. Editora LTC, 2002.
- [4] - Simon Haykin, Barry Van Veen. Sinais e Sistemas. Edição. Editora Bookman, 2001.
- [5] - Phillips, Charles L., Harbor, Royce D. Sistemas de Controle e Realimentação. 1ª Edição. Editora Makron Books, 1996.
- [6] - Hurley, William G., Senior Member, IEEE, and Wolfle, Werner H. Eletromagnetic Design of a Magnetic Suspension System. 1997. 7f. IEEE TRANSACTIONS ON EDUCATION, VOL. 40, Nº.2.
- [7] - Paschal II, Stephen C. Design, Fabrication and Control of a Single Actuator Magnetic Levitation System. 2002. 45f. Sênior Honors Thesis (Mechanical Engineering).
- [8] - Myauo, Teng. Experiment 04 – Maglev. 2003. 39f. Computer Control Systems.

## 7 – Anexos

### Anexo A

Arquivo sistema\_mag.m

**%Parametros do Sistema**

```
Rl=11;  
L=0.4125;  
g=9.81;  
ieq=1;  
xeq=0.007;
```

**%Sistema em Equações de Estado**

```
A=[-Rl/L 0 0; 0 0 1; (-2*g)/ieq (2*g)/xeq 0];  
B=[1/L; 0 ; 0];  
C=[0 1 0];  
D=[0];
```

**%Função de Transferencia da Planta**

```
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D);  
Gp=tf(num,den);  
step(Gp)
```

**%Função de Transferencia do Sensor**

```
H=1934.5;
```

**%Função de Transferencia do Sistema a Malha Fechada**

```
Gmf=feedback(Gp,H);  
step(Gmf);
```

**%Diagrama de Root Locus do Sistema a Malha Fechada**

```
rlocus(Gp*H);
```

**%Resposta desejada do Sistema**

**%Coeficiente de Amortecimento**

```
amt=0.7;
```

**%Tempo de Acomodação do Sistema**

```
ts=0.25;
```

**%Determinação da frequencia natural nao amortecida**

**%(criterio de 5% para o tempo de acomodação)**

```
wn=3/(amt*ts);
```

**%Determinação dos polos do Sistema Global para o Desempenho Desejado**

```
p1=-(amt*wn)+j*wn*sqrt(1-amt^2);  
p2=-(amt*wn)-j*wn*sqrt(1-amt^2);
```

**%Funcao de Transferencia Global**

```
num_g=-47.56;  
den_g=[-26.67 -52.9 p1 p2];  
den_go=poly(den_g);  
Go=tf(num_g,den_go);  
t=0:0.01:1;  
step(Go,t)  
rlocus(Go);  
polos=pole(Go);  
zeros=zero(Go);
```

**%Função de Transferencia do Compensador**

```
a=tf(den,num);  
b=feedback(Go,H,+1);  
Gc=tf(a.num,b.den);  
sin(Gc);  
step(Gc);  
pole(Gc);  
zero(Gc);
```

**%Verificação de Polos Instaveis em um Intervalo de  
%Periodo de Amostragem Escolhido**

```
for t=0.001:0.001:10  
    z=c2d(Gc,t);  
    p=pole(z);  
    for i=1:1:4  
        if abs(p(i))>1  
            break  
            tfinal=t  
        end  
    end  
end  
end
```

**%Discretização do Compensador**

```
Gz=c2d(Gc,0.01)  
step(Gz)
```